バナッハ空間におけるBirkhoff直交性の対称性について

斎藤 吉助 (新潟大学)
田中 亮太朗 (東京理科大学)
小室 直人 (北海道教育大学)

1 導入

本論文では、バナッハ空間において一般化された直交性の一つであるBirkhoff直交性について述べる。ここで述べられる主な結果は、Komuro-Saito-Tanaka [12] に既に発表済みであるため、詳しい証明等については参考文献に記載の論文を参照されたい。

さて、ヒルベルト空間における通常の直交性をバナッハ空間へと一般化する方法は数多くあるが、本論文で採用されるBirkhoffの方法は、特に、最短距離や接線等の幾何的な概念との結びつきが強い。

定義 1.1. X をバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、x が y に Birkhoff 直交するとは、すべてのスカラー λ に対して $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ が成立することを言い、$x \perp_B y$ で表される。

定義からわかるように、$x \perp_B y$ は、x を通る y 方向への直線と原点との間の距離が、x において最短になることを意味している。また、$\|x\| = 1$ であるとき、$x \perp_B y$ であることと、直線 $\{x+\lambda y : \lambda$はスカラー$\}$ が X の単位球 B_X の接線であることとは同値である。さらに、バナッハ空間の単位球の接超平面 (supporting hyperplane) とバナッハ双対空間内の接汎関数 (support functional) とは対応しているから、Birkhoff直交性はしばしば接汎関数を通しても論じられる。

もちろん、ヒルベルト空間においては、通常の直交性とBirkhoff直交性とは同値となる。また、一般のバナッハ空間においても、Birkhoff直交性は、次の点でヒルベルト空間における直交性と類似している。

(i) すべての $x \in X \setminus \{0\}$ に対して、$x \perp_B M$ となる X の超平面 M が存在する。

(ii) $x \perp_B y$ ならば、すべてのスカラー α, β に対して、$\alpha x \perp_B \beta y$ となる。

一方で、Birkhoff直交性は、直交性として持つべきいくつかの性質を持ち得ない。例えば、次のような点で、Birkhoff直交性はヒルベルト空間における直交性と相異なる。

(iii) $x \perp_B y$ であっても、$y \perp_B x$ であるとは限らない。

(iv) $x \perp_B y$ および $x \perp_B z$ であっても、$x \perp_B y + z$ であるとは限らない。

Birkhoff 直交性をはじめとしたバナッハ空間における直交性の諸性質については、Alonso-Martini-Wu [1] が詳しい。また、特に、(iii) については、バナッハ空間 X において、$\dim X \geq 3$ かつ $x \perp_B y \Leftrightarrow y \perp_B x$ であるとき、X はヒルベルト空間となることが知られている。つまり、ほとんどすべてのバナッハ空間において、Birkhoff 直交性は大域対称性を持たない。この強力な結果の存在により、近年に至るまで、$\dim X = 2$ の場合を除いて Birkhoff 直交性の対称性を追究するような研究は行われてこなかった。しかし、2005 年に、Turnšek [15] によって Birkhoff 直交性の局所対称性の研究とその応用が論じられて以来、Birkhoff 直交性の対称性が再び注目を集め、盛んに研究されるようになった。

最近の研究で用いられている次の概念は、Sain [13] 及び Sain-Ghosh-Paul [14] において導入された。

定義 1.2. X をバナッハ空間とし、$x \in X$ とする。そのとき、x が Birkhoff 直交性に関する左対称点であるとは、$y \in X$ かつ $x \perp_B y$ ならば $y \perp_B x$ となることを言う。

定義 1.3. X をバナッハ空間とし、$x \in X$ とする。そのとき、x が Birkhoff 直交性に関する右対称点であるとは、$y \in X$ かつ $y \perp_B x$ ならば $x \perp_B y$ となることを言う。

これらの定義は一見似通っているが、それぞれの持つ意味は全く異なる。実際、次のことが知られている。

定理 1.4 (Turnšek [15])**.** H を複素ヒルベルト空間とし、$B(H)$ を H 上の有界線形作用素の全体が成す環とする。そのとき、$A \in B(H)$ が Birkhoff 直交性に関する右対称点であることと、A が等距離作用素または余等距離作用素のスカラー倍であることとは同値である。

定理 1.5 (Turnšek [16])**.** H を複素ヒルベルト空間とする。そのとき、$A \in B(H)$ が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$A = 0$ とは同値である。

他にも、Birkhoff 直交性及びその派生に関する局所対称性の研究は様々に行われており、例えば、Arambašić-Rajić [2, 3, 4, 5], Chmieliński-Wójcik [7], Ghosh-Sain-Paul [8] 等が知られている。

本論文では、特に Turnšek の結果に着目し、より一般のフォン・ノイマン環において Birkhoff 直交性の局所対称性を論じることで、左対称点と右対称点それぞれの本質を探ることを目的とする。

2 準備

本論文で取り扱うバナッハ空間は、すべて複素バナッハ空間である。X をバナッハ空間としたとき、$X^\sharp$ は X の双対バナッハ空間を表す。汎関数 $f \in X^\sharp \setminus \{0\}$ が X の単位球 B_X の接汎関数であるとは、ある $x \in B_X$ に対して $\mathrm{Re}\, f(x) = \|f\|$ となることをいう。また、このとき、f は x において B_X に接するという。汎関数 f が x において B_X に接するとき、集合 $x + \ker f$ は x における B_X の一つの接超平面を与える。次の結果は、Birkhoff 直交性と接汎関数とを関連付ける。

補題 2.1 (James [9])**.** X をバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、$x \perp_B y$ であることと、$f(x) = \|x\|$ 及び $f(y) = 0$ を満たす B_X の接汎関数 $f \in X^\sharp$ が存在することとは同値である。

この結果は、Birkhoff 直交性の幾何的な言い換えを与えるだけでなく、Birkhoff 直交性に関する技術的な議論にもしばしば応用される。

本論文における主な対象は、フォン・ノイマン環とその前双対であり、フォン・ノイマン環とは特殊な C^* 環である。バナッハ環 $\mathfrak{A}$ が C^* 環であるとは、バナッハ環としての演算に加えて対合 $A \mapsto A^*$ が定義され、すべての $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\|A^*A\| = \|A\|^2$ を満たすことを言う。ここで、対合とは、すべての $A, B \in \mathfrak{A}$ 及びすべての $a, b \in \mathbb{C}$ に対して

(i) $(aA + bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$,

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$,

(iii) $(A^*)^* = A$

を満たす写像を指す。H がヒルベルト空間であるとき、$B(H)$ は C^* 環の例を与える。また、Gelfand-Naimark-Segal 表現により、すべての C^* 環は、あるヒルベルト空間 H に対して、$B(H)$ の C^* 部分環であると見なせる。

H をヒルベルト空間とする。そのとき、$x, y \in H$ に対して、$B(H)$ 上の汎関数 $\omega_{x,y}(A) = \langle Ax, y\rangle$ が定まる。これらの汎関数が成す族 $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ に関する弱位相は、$B(H)$ 上の弱作用素位相 (the weak-operator topology) と呼ばれる。H に作用するフォン・ノイマン環とは、$B(H)$ の C^* 部分環であって、弱作用素位相に関して閉であるものを言う。フォン・ノイマン環は、常に恒等作用素 I を含む。

$\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とする。そのとき、$X^\sharp = \mathcal{R}$ を満たすようなバナッハ空間 X が、等距離同型を除いて一意に定まる。この X を $\mathcal{R}$ の前双対 (predual) と呼び、$\mathcal{R}_\sharp$ で表す。より具体的には、$\mathcal{R}_\sharp$ は $\mathcal{R}$ 上の正規汎関数の全体とすればよい。ここで、$f \in \mathcal{R}^\sharp$ が正規 (normal) であるとは、それが $B_{\mathcal{R}}$ 上で弱作用素連続であることを言う。

$B(H)$ においては、Birkhoff 直交性はもう一つの有用な特徴付けを持つ。

補題 2.2 (Bhatia-Šemrl [6])**.** H をヒルベルト空間とし、$A, B \in B(H)$ とする。そのとき、$A \perp_B B$ であることと、$\|Ax_n\| \to \|A\|$ 及び $\langle Ax_n, Bx_n\rangle \to 0$ を満たす H 内の単位ベクトル列 (x_n) が存在することとは同値である。

この結果は、作用素の極分解を通して議論を正値作用素の場合に帰着する際に用いられる。ここで、$A \in B(H)$ が正値 (positive) であるとは、すべての $x \in H$ に対して $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ が成立することを言い、$A \geq 0$ で表される。これは、次の条件のそれぞれと同値である。

(i) A は自己共役 (つまり、$A^* = A$) で、$\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$ を満たす。ここで、$\sigma(A)$ は A のスペクトルを表す。

(ii) ある作用素 B に対して、$A = B^*B$。

(iii) ある正値作用素 H に対して、$A = H^2$。

この (iii) を満たす正値作用素 H は、正値作用素 A に対して一意に定まり、$A^{1/2}$ と書かれる。

各 $A \in B(H)$ に対して、$|A| = (A^*A)^{1/2}$ と定められる。また、$V \in B(H)$ は V^*V が直交射影であるとき、部分等距離作用素 (partial isometry) と呼ばれ、V^*V を初期射影 (initial projection)、VV^* を最終射影 (final projection) とそれぞれ呼ぶ。E, F が直交射影であり、ある部分等距離作用素 V に対して $E = V^*V$ 及び $F = VV^*$ となるとき、E と F は同値であると言われ、$E \sim F$ で表される。$A \in B(H)$ のとき、初期射影と最終射影がそれぞれ A^* 及び A の値域射影 (range projection) であるような部分等距離作用素 V を用いて、$A = V|A|$ と書ける。これを A の極分解 (polar decomposition) と呼ぶ。$\mathcal{R}$ がフォン・ノイマン環であり、$A \in \mathcal{R}$ であるとき、$V, |A| \in \mathcal{R}$ がわかる。その他、作用素環論の基礎事項については、例えば、Kadison-Ringrose [10, 11] 等を参照されたい。

3　フォン・ノイマン環における局所対称性

ここでは、フォン・ノイマン環において、Birkhoff 直交性に関する左対称点と右対称点の特徴付けを与える。いずれの場合も、作用素の極分解を通して議論の簡略化ができる。そのために、いくつかの準備を要する。

補題 3.1. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ とする。A が $V \in \mathcal{R}$ を用いて $A = V|A|$ と極分解されるとき、$|A| \perp_B B$ と $A \perp_B VB$ とは同値である。

$\mathcal{R}$ を環とするとき、$\mathcal{R}$ のすべての元と可換であるような $\mathcal{R}$ の元の全体を、$\mathcal{R}$ の中心 (center) と呼ぶ。特に、$\mathcal{R}$ がフォン・ノイマン環で、直交射影 $P \in \mathcal{R}$ が $\mathcal{R}$ の中心に属するとき、P は中心射影 (central projection) と呼ばれる。中心射影について、次のことが成立する。

補題 3.2. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A, B \in \mathcal{R}$ とする。$P \in \mathcal{R}$ が中心射影であるとき、$AP \perp_B B$ と $AP \perp_B BP$ とは同値である。

3.1　左対称点

フォン・ノイマン環における Birkhoff 直交性の左対称点を研究する上で、Arambašić-Rajić [5] による次の結果が良い出発点となる。(実際には、より広い C^* 加群の設定で示されている。)

補題 3.3 (Arambašić and Rajić [5])**.** $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ とする。もし A が Birkhoff 直交性に関する左対称点であるならば、そのとき、$|A|$ 及び $|A^*|$ はいずれも $\mathcal{R}$ の極小射影のスカラー倍である。ここで、$E \in \mathcal{R}$ が $\mathcal{R}$ の極小射影であるとは、$E\mathcal{R}E = \mathbb{C}E$ を満たすことをいう。

この結果により、左対称点は非常に強い必要条件を持つことがわかるが、これが十分条件とならないことは、定理 1.5 から明らかである。つまり、$|A|$ 及び $|A^*|$ が極小射影のス

カラー倍であっても、A が左対称点であるとは限らない。以下では、この極小性にどのような条件を付加すれば左対称点の特徴付けが得られるのかを述べる。このとき、次の結果が重要な役割を果たす。

補題 3.4. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ は Birkhoff 直交性に関する左対称点であるとする。直交射影 $E, F \in \mathcal{R}$ が $EF = 0$ 及び $E + F = I$ を満たし、ともに A と可換であるとき、$EA = 0$ または $FA = 0$ が成立する。

命題 3.5. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ は Birkhoff 直交性に関する左対称点であるとする。そのとき、$\mathcal{R}$ の中心射影 P, Q で、$P + Q = I$ 及び次の条件の一方を満たすものが存在する。

(i) $|A| = |A|P$ であり、かつ、$|A|$ は $\mathcal{R}P$ において Birkhoff 直交性に関する左対称点である。

(ii) $|A^*| = |A^*|Q$ であり、かつ、$|A^*|$ は $\mathcal{R}Q$ において Birkhoff 直交性に関する左対称点である。

これにより、フォン・ノイマン環を中心射影を用いて分解した場合、左対称点はその構成要素のうちの一つにのみ含まれることがわかる。一方で、すべてのフォン・ノイマン環は、中心射影によって I_n 型、II 型及び III 型のフォン・ノイマン環へと分解されることが知られている。ここで、I_n 型と呼ばれるものは、可換フォン・ノイマン環を成分とする n 次正方行列の全体により表されるフォン・ノイマン環で、n は任意の順序数である。また、II 型と III 型のフォン・ノイマン環については、極小射影を含まないように定められている。従って、命題 3.5 より、フォン・ノイマン環における Birkhoff 直交性の左対称点は、少なくとも II 型と III 型の構成要素には属さないことがわかる。あとは、I_n 型の部分を調べればよいが、これについては定理 1.5 (特に、2 次正方行列からなる代数 $M_2(\mathbb{C})$ の部分) が本質的である。次の補題を用いて、2 次正方行列の場合に帰着してやればよい。

補題 3.6. $\mathcal{R}$ を I_n 型フォン・ノイマン環とし、$E \in \mathcal{R}$ を可換射影 (すなわち、$E\mathcal{R}E$ が可換環となるもの) とする。そのとき、互いに同値な直交射影の直交族 (E_b) が存在して $I \sim \sum_b E_b$ を満たし、また、$EE_b = E$ となる b が唯一つ存在する。

この補題を用いることで、すべての $n \geq 2$ に対して、左対称点が I_n 型の構成要素に属さないことがわかる。従って、左対称点は自動的に I_1 型の構成要素に属することになるが、これは元の環の中心に含まれるから、左対称点は中心的極小射影であることがわかる。一方で、中心的という条件を付加すれば、極小射影は常に左対称点となることが示せるから、結局、次を得る。

定理 3.7. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ とする。そのとき、A が Birkhoff 直交性に関する左対称点であることと、$|A|$ が $\mathcal{R}$ の中心的極小射影であることとは同値である。

3.2 右対称点

左対称点が極小性（と中心性）により特徴付けられた一方、右対称点はある意味での極大性を持つ。実際、次が成立する。

補題 3.8. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ は Birkhoff 直交性に関する右対称点であるとする。直交射影 $E \in \mathcal{R}$ が A と可換であれば、$\|EA\| = \|A\|$ が成立する。

これを用いることで、左対称点の場合と同様に、極分解を通した議論の簡略化が可能になる。

命題 3.9. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ は Birkhoff 直交性に関する右対称点であるとする。そのとき、$\mathcal{R}$ の中心射影 P, Q で、$P + Q = I$ 及び次の条件の両方を満たすものが存在する。

(i) $|A|P$ は $\mathcal{R}P$ において Birkhoff 直交性に関する右対称点である。

(ii) $|A^*|Q$ は $\mathcal{R}Q$ において Birkhoff 直交性に関する右対称点である。

$\mathfrak{A}$ を単位的 C^* 環とし、$A \in \mathfrak{A}$ は自己共役であるとする。そのとき、A と I により生成される $\mathfrak{A}$ の可換 C^* 部分環は、A のスペクトル上の連続関数環 $C(\sigma(A))$ と同一視される。このことから、連続関数環において Birkhoff 直交性の右対称点を明らかにすることは、非可換なフォン・ノイマン環における右対称点の必要条件を得る上でも有用である。

定理 3.10. K をコンパクトハウスドルフ空間とし、$f \in C(K)$ は $\|f\|_\infty = 1$ を満たすとする。そのとき、次は同値である。

(i) f は Birkhoff 直交性に関する右対称点である。

(ii) すべての $t \in K$ に対して、$|f(t)| = 1$ である。

X をバナッハ空間とし、$x \in B_X$ とする。そのとき、x が単位球 B_X の端点 (extreme point) であるとは、$y, z \in B_X$ 及びある $t \in (0,1)$ に対して $x = ty + (1-t)z$ であるならば、$x = y = z$ であることを言う。また、$B(H)$ の元 A が等距離作用素であるとは、$A^*A = I$ となることを言い、A が余等距離作用素であるとは、$AA^* = I$ となることを言う。

以上の準備の下、フォン・ノイマン環のおける Birkhoff 直交性の右対称点は次のように特徴付けられる。

定理 3.11. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン環とし、$A \in \mathcal{R}$ は $\|A\| = 1$ を満たすとする。そのとき、次は同値である。

(i) A は Birkhoff 直交性に関する右対称点である。

(ii) A は等距離作用素と余等距離作用素の直和である。

(iii) A は $\mathcal{R}$ の単位球の端点である。

フォン・ノイマン環の単位球の端点は、ある順序関係に関して極大な部分等距離作用素であることが知られている。この意味において、フォン・ノイマン環における Birkhoff 直交性の左対称点と右対称点は、極小性と極大性という対極的な性質により特徴付けられることが示された。これが、定理 1.4 及び 1.5 で漠然と見えていた違いの正体である。

参考文献

[1] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequationes Math., **83** (2012), 153–189.

[2] L. Arambašić and R. Rajić, *The Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules*, Linear Algebra Appl., **437** (2012), 1913–1929.

[3] L. Arambašić and R. Rajić, *A strong version of the Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules*, Ann. Funct. Anal., **5** (2014), 109–120.

[4] L. Arambašić and R. Rajić, *Operators preserving the strong Birkhoff-James orthogonality on $B(H)$*, Linear Algebra Appl., **471** (2015), 394–404.

[5] L. Arambašić and R. Rajić, *On symmetry of the (strong) Birkhoff-James orthogonality in Hilbert C^*-modules*, Ann. Funct. Anal., **7** (2016), 17–23.

[6] R. Bhatia and P. Šemrl, *Orthogonality of matrices and some distance problem*, Linear Algebra Appl., **287** (1999), 77–85.

[7] J. Chmieliński and P. Wójcik, *Approximate symmetry of Birkhoff orthogonality*, J. Math. Anal. Appl., **461** (2018), 625–640.

[8] P, Ghosh, D. Sain and K. Paul, *On symmetry of Birkhoff-James orthogonality of linear operators*, Adv. Oper. Theory, **2** (2017), 428–434.

[9] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **61** (1947), 265–292.

[10] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, Elementary theory. Reprint of the 1983 original. Graduate Studies in Mathematics, **15**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[11] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*, Advanced theory. Pure and Applied Mathematics, **100**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

[12] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Symmetric points for (strong) Birkhoff orthogonality in von Neumann algebras with applications to preserver problems*, J. Math. Anal. Appl., **463** (2018), 1109–1131.

[13] D. Sain, *Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite dimensional Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **447** (2017), 860–866.

[14] D. Sain, P. Ghosh and K. Paul, *On symmetry of Birkhoff-James orthogonality of linear operators on finite-dimensional real Banach spaces*, Oper. Matrices, **11** (2017), 1087–1095.

[15] A. Turnšek, *On operators preserving James' orthogonality*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 189–195.

[16] A. Turnšek, *A remark on orthogonality and symmetry of operators in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, Linear Algebra Appl., **535** (2017), 141–150.